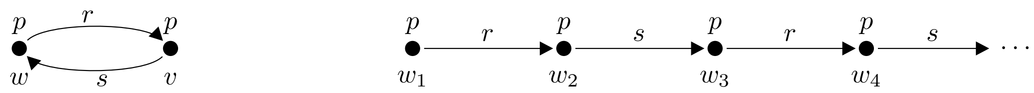
Práctica 3

Lógicas Modales

1er cuatrimestre, 2012

Los ejercicios marcados con (E) son para entregar por todos. Los ejercicios marcados con (EP) son para entregar por los que estén tomando el curso como alumnos de posgrado.

Ejercicio 1. Mostrar que los siguientes modelos (sobre una signatura con dos símbolos de relación r y s) son bisimilares



Ejercicio 2. Mostrar que la unión de bisimulaciones es una bisimulación.

Ejercicio 3. Sea Z_1 una bisimulación total entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ y sea Z_2 una bisimulación total entre $\mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_3$. Mostrar $Z_1 \circ Z_2$ es una bisimulación total entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_3$.

Ejercicio 4. (E) Mostrar que una autobisimulación máxima es una relación de equivalencia (i.e., reflexiva, transitiva y simétrica).

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ un modelo y $\mathcal{M}'$ su contracción por bisimulación. Demostrar que $\langle \mathcal{M}, w\rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w]\rangle$ son bisimilares para todo w

Ejercicio 6.

(I) Un *homomorfismo* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R_i'\}, V'\rangle$ es una función $f : W \to W'$ tal que

- Para todo $w \in W$ y todo símbolo de proposición p, $w \in V(p)$ implica $f(w) \in V'(p)$
- Para todo $w, v \in W$, si $R_i wv$ entonces $R_i' f(w)f(v)$

Mostrar que la verdad de fórmulas modales no es preservada por homomorfismos

(II) Un *homomorfismo fuerte* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R_i'\}, V'\rangle$ es una función $f : W \to W'$ tal que

- Para todo $w \in W$ y todo símbolo de proposición p, $w \in V(p)$ sii $f(w) \in V'(p)$
- Para todo $w, v \in W$, $R_i wv$ sii $R_i' f(w)f(v)$

Mostrar que la verdad de fórmulas modales tampoco es preservada por homomorfismos fuertes

Ejercicio 7. (EP) Mostrar que todo modelo es la imagen de algún p-morfismo sobreyectivo que tiene como dominio la unión disjunta de modelos generados a partir de un punto (i.e., rooted models). (*Sugerencia:* No amedrentarse ante lo técnico que parece el enunciado de este ejercicio)

Ejercicio 8. (E) Llamemos K a la lógica modal básica, K_A a la lógica modal básica extendida con la modalidad universal A, K_T a la extendida con el el operador de pasado $\langle r\rangle^{-1}$ y K_D a la extensión con el operador de diferencia D

(I) Demostrar usando bisimulaciones que no es posible dar una traducción que preserve verdad de fórmulas

(a) de K_T a K

(b) de K_A a K

(II) Dar una noción de bisimulación para K_A, y probar que ninguna fórmula de esta lógica puede distinguir elementos bisimilares

(III) Demostrar usando bisimulaciones que no es posible dar una traducción que preserve verdad de fórmulas de K_D a K_A

(IV) Dar una noción de bisimulación y probar que elementos bisimilares no son distinguibles

(a) para K_T

(b) para K_D

(V) ¿Cuáles de las operaciones de preservación vistas para K también valen en K_A, K_T ó K_D?

Ejercicio 9. (EP) Dar una noción adecuada de bisimulación para $\mathcal{HL}(@)$ y mostrar que preserva verdad de fórmulas.

Ejercicio 10. La semántica del operador binario *until* U (muy utilizado en verificación de sistemas temporales) sobre un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, está dada por la cláusula

$$\mathcal{M}, w \models U(\varphi,\psi) \quad \text{sii} \quad \begin{array}{l}\text{existe un } v \text{ tal que } Rwv,\ \mathcal{M}, v \models \varphi \text{ y, para todo} \\ u \text{ tal que } Rwu \text{ y } Ruv, \text{ se cumple } \mathcal{M}, u \models \psi\end{array}$$

Mostrar que U no es definible en la lógica modal básica.

Sugerencia: Considerar los siguientes dos modelos, en los que la relación de accesibilidad está dada por la clausura transitiva de las relaciones dibujadas: